3.6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

3.6.1. Равновесие в экономических системах

До сих пор мы рассматривали поведение двух субъектов экономики – потребителя и производителя – изолированно друг от друга. Теперь следует рассмотреть их взаимодействие в рамках более крупной структуры – рынка. Взаимодействие субъектов приводит к понятию **равновесия**.

В широком смысле слова равновесие в ситуации взаимодействия субъектов с несовпадающими интересами – это такое состояние системы (в политике или экономике), которое устраивает всех ее участников за неимением лучшего. В конкретных случаях даются более узкие определения понятия равновесия.

Пример 3.13. Допустим, в системе имеется несколько участников с несовпадающими интересами. Реализация целей каждого участника зависит как от его действий, так и от действий других участников. При этом участники действуют независимо друг от друга и не обмениваются информацией о предполагаемых действиях. В итоге каждый участник должен предполагать, что остальные участники процесса действуют оптимальным для себя образом. В этом случае равновесным считается такое состояние системы, при котором отклонение от нее любого из участников при условии неизменного поведения остальных ухудшает его собственное положение. Это **равновесие по Нэшу** (Джон Форбс Нэш (род. в 1928 г.) – американский математик, лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 г.). Частным случаем равновесия по Нэшу для случая двух участников с прямо противоположными интересами является равновесие с **седловой точкой**. Эти понятия широко используются в теории игр, входящей в круг интересов одной из экономико-математических дисциплин – **исследования операций**.

Пример 3.14. Если участники процесса, интересы которых не совпадают, могут обмениваться информацией о предполагаемых действиях, то равновесие может возникнуть вследствие того, что любая информация со стороны одного участника о его предполагаемых действиях, приносящих ущерб другим участникам, встречает ответную информацию о предполагаемых противодействиях, и это заставляет участника воздержаться от каких-либо действий. Такое **равновесие на основе угроз** часто встречается в политике.

В моделях рынка под равновесием понимается равенство спроса на товар ***D*** и предложения этого товара ***S*** при определенной цене на него ***p****. Соответствующая цена называется **равновесной**. Математическое выражение равновесия

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Графическая иллюстрация этого определения (при условии, что товар является нормальным) дана на рис. 3.21.

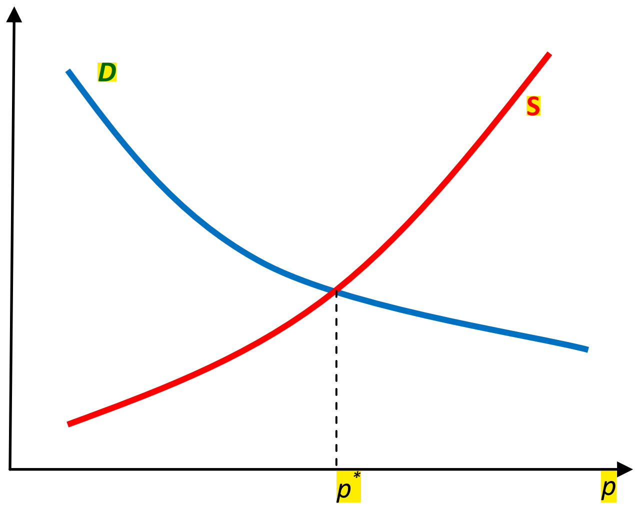

Рис. 3.21. Равновесие спроса и предложения

Цена равновесия ***p**** определяется под влиянием факторов производства и потребления. Со стороны производителя на нее влияют удельные издержки на производство товара, со стороны потребителя – доход потребителя и относительная полезность товара.

В более общем случае равновесием считается любое состояние, в котором избыточный спрос $E = D - S$ неположителен: $D - S \leq 0$.

3.6.2. Влияние спроса и предложения на рыночное равновесие

Качественно проследить влияние различных факторов на параметры равновесия в случае одного товара можно на основе графического анализа.

Допустим, доход потребителя увеличился. В этом случае кривая спроса займет более высокое положение (рис. 3.22, кривая $\boldsymbol{D'}$). Видно, что точка равновесия смещается при этом вправо – в сторону более высокой цены равновесия. Величина равновесного спроса-предложения, т.е., объема продаж (в натуральном выражении), определяемая вертикальной координатой точки пересечения кривых спроса и предложения, также увеличивается (само собой, объем продаж в данном случае увеличивается и в денежном выражении).

Если на рынке появляется более эффективный или дешевый заменитель данного товара, спрос на него падает. В результате кривая спроса смещается вниз (рис. 3.22, кривая $\boldsymbol{D''}$). Можно видеть, что новая цена равновесия $\boldsymbol{p^{*''}}$ становится меньше первоначальной, а объем продаж падает как в натуральном, так и в денежном выражении.

Изменения предложения товара, в свою очередь, также влияют на спрос. Например, повышение предложения возникает при уменьшении издержек вследствие снижения цен на сырье при появлении новых его источников (скажем, открытии новых месторождений), вследствие внедрения новых прогрессивных технологий и по другим причинам. В этом случае кривая предложения смещается вверх (рис. 3.23, кривая S'). Видно, что новой точке равновесия соответствуют меньшая цена и более высокий объем продаж (в натуральном выражении).

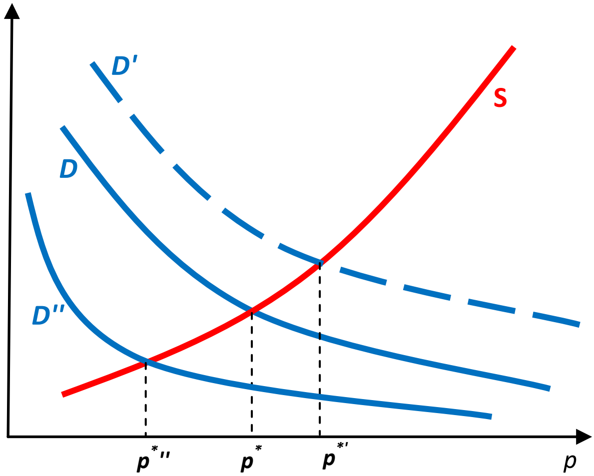

Рис. 3.22. Влияние изменений спроса на равновесие

Предложение может и снижаться при уменьшении производства товара из-за снижения поставок сырья – импортного, или сельскохозяйственного при неурожае, из-за разрыва ранее существовавших хозяйственных связей, подорожания дефицитного сырья и др. Во всех этих случаях кривая предложения смещается вниз (рис. 3.23, кривая S''). Новое равновесие устанавливается при более высокой цене $p^{*''}$ и уменьшенном объеме продаж (также в натуральном выражении).

Изменение объема продаж в денежном выражении при изменениях предложения нельзя предсказать однозначно на качественном уровне, т.к. изменения объема продаж в натуральном выражении и цены на товар в этом случае разнонаправлены. Денежный объем может, как вырасти, так и уменьшиться.

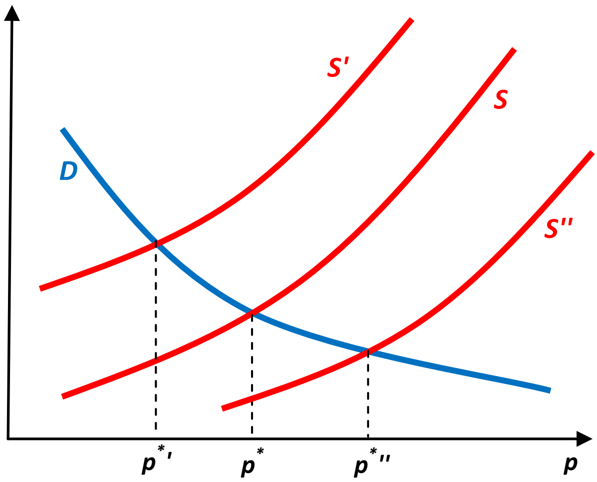

Рис. 3.23. Влияние изменений предложения на равновесие

Из приведенного анализа можно видеть, что одностороннее увеличение доходов потребителей (и, соответственно, спроса), не сопровождаемое повышением предложения (т.е., совершенствованием производства) ведет к росту цен. Такое явление называется **инфляцией спроса**. С другой стороны, повышение цен происходит и при снижении предложения (вследствие повышения издержек) в условиях неизменного спроса – это **инфляция издержек**.

Более подробный анализ равновесия, связанный с одновременным изменением, как спроса, так и предложения, требует знания математических выражений функций спроса и предложения.

Рассмотрим простой пример.

Пример 3.15. Пусть в системе производится и продается один товар. Функция издержек при его производстве является квадратичной и имеет вид

$$C(y) = C_0 + by^2,$$

а спрос потребителя описывается сравнительно простой функцией

$$D(p) = \frac{\gamma I}{p},$$

где $\boldsymbol{I}$ – доход потребителя, $\boldsymbol{\gamma}$ – постоянный коэффициент, определяющий относительную полезность рассматриваемого товара среди различных товаров, приобретаемых потребителем. Такая функция представляет собой сочетание степенных моделей функции спроса (3.43) и (3.49), с показателями, равными 1 в обоих случаях.

Решение

Оптимальное решение, определяющее предложение товара в зависимости от цены, имеет вид (3.98) при $a = 0$, $h = 2$

$$S(p) = \frac{p}{2b}.$$

Тогда цена равновесия $\boldsymbol{p^*}$ определяется из решения уравнения (3.110), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{p}{2b} = \frac{\gamma I}{p}.$$

Отсюда находим параметры равновесия: цену и спрос-предложение (т.е., равновесный объем продаж товара)

$$p^* = \sqrt{2\gamma b I}, \qquad S^* = \sqrt{\frac{\gamma I}{2b}}.$$

Можно видеть, что при увеличении издержек (коэффициента $\boldsymbol{b}$) цена равновесия увеличивается, а объем продаж падает. Выручка производителя

$$p^* S^* = \gamma I$$

остается постоянной и составляет долю $\boldsymbol{\gamma}$ от дохода, которую потребитель намерен выделять для покупки данного товара.

При увеличении дохода потребителя I или относительной полезности товара γ увеличиваются и спрос на товар, и равновесная цена на него.

Следует иметь в виду, что подобный расчет параметров равновесия малопригоден для определения равновесной цены в реальных ситуациях. Это связано со стохастическим (см. часть 1) характером моделей спроса и предложения. В реальности на спрос и предложение влияет большое количество случайных внешних факторов, и реальные значения могут отличаться от расчетных. Поэтому достижение равновесия на реальном рынке происходит постепенно. Далее мы рассмотрим некоторые модели процессов прихода к равновесию.

3.6.3. Виды рыночного равновесия

В конкурентной экономике достижение равновесия происходит стихийно в результате совершения большого числа рыночных сделок. Если цена высока (превышает равновесную), у производителей возникает стремление увеличить количество предлагаемого товара. Но оно будет превышать то количество, на которое покупатели намерены предъявить спрос. В результате часть продавцов захочет избавиться от излишков товара, сбывая его по сниженной цене. Возникает давление на цену в сторону ее снижения. Аналогичным образом в случае заниженной цены возникнет давление на нее в сторону повышения.

При возникновении устойчивого спроса на товар, зависящего только от его цены и не зависящего от времени, различают три вида равновесия (рис. 3.24):

1) **Мгновенное** равновесие создается в условиях краткого периода времени после возникновения спроса, если производители не в состоянии сразу расширить производство и предложение товара на какое-то время остается фиксированным (линия S_1).В этих условиях равновесие устанавливается на высоком уровне цены p^*_1, что стимулирует производителей к расширению производства.

2) Если после установления мгновенного равновесия производители быстро вводят в действие имеющиеся резервы (сво-

бодные производственные мощности), предложение может за достаточно короткий срок несколько увеличиться, причем тем сильнее, чем выше существующая цена на товар (линия S_2). В результате равновесная цена несколько понижается – до уровня p^*_2. Такое равновесие называется **кратковременным**.

3) Если равновесная цена после достижения кратковременного равновесия остается достаточно высокой, к выпуску товара подключаются все производители, которые способны наладить выпуск данного товара (в том числе и те, кто до сих пор этим не занимался). Предложение еще более возрастает (линия S_3) и равновесная цена снижается до уровня p^*_3, соответствующего нормальным издержкам производства. Если же предложение окажется избыточным и цена понизится до более низкого значения, часть производителей может уйти с рынка, снизив тем самым предложение и создав условия для повышения равновесной цены. В результате устанавливается длительное нормальное равновесие.

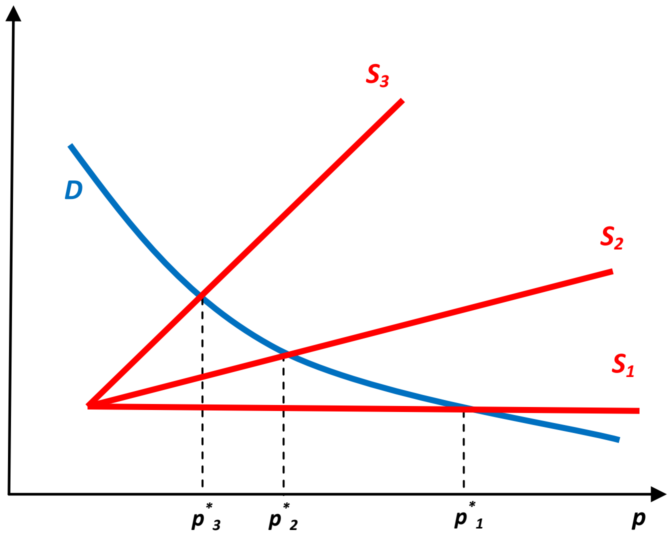

Рис. 3.24. Виды рыночного равновесия

3.6.4. Стихийное достижение равновесия на рынке одного товара. Паутинообразная модель

Процесс приближения к нормальному равновесию можно представить при помощи последовательности дискретных шагов, анализируя кривые спроса и предложения. Процесс колебаний рынка разбивается на отдельные интервалы времени, условно называемые торговыми днями (по продолжительности они не обязаны совпадать с днями календарными).

Допустим, что к началу 1-го торгового дня установилась некая цена $\boldsymbol{p_1}$. Она определяет уровень предложения $\boldsymbol{S_1}$ (рис. 3.25, точка $\boldsymbol{A}$). Но при столь высоком предложении равный ему спрос $\boldsymbol{D_1}$ соответствует более низкой цене $\boldsymbol{p_2}$ (точка $\boldsymbol{B}$). Иными словами, покупатели не станут покупать товар по высокой цене $\boldsymbol{p_1}$. Возникает описанное выше давление на цену в сторону снижения и цена упадет до уровня $\boldsymbol{p_2}$, обеспечивающего нужный спрос на товар и его реализацию в течение торгового дня.

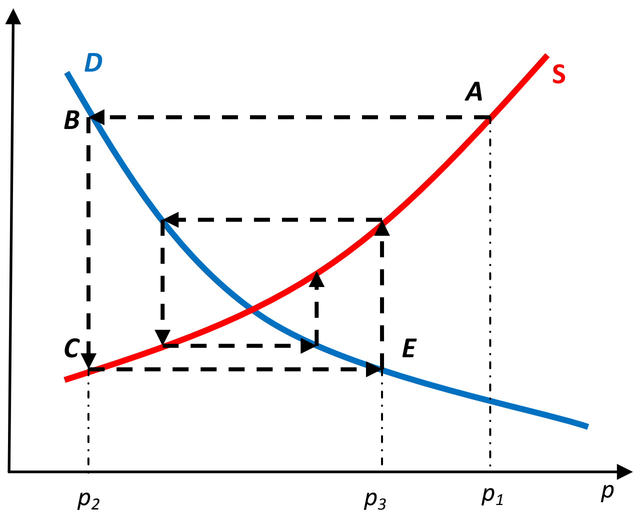

Рис. 3.25. Паутинообразная модель установления равновесия

Эта цена становится исходной для следующего торгового дня. Но теперь уже производители не согласны предложить по столь низкой цене прежнее количество товара. Предложение упадет до уровня, соответствующего цене (точка $\boldsymbol{C}$). Возникает ситуация неудовлетворенного спроса, при которой покупатели согласны платить за товар дороже. Это стимулирует повышение цены в течение торгового дня до уровня $\boldsymbol{p_3}$ (точка $\boldsymbol{E}$). На третий день повторяется та же ситуация, что и в первый день, и т.д.

Геометрическое изображение этого процесса (ломаная сходящаяся спираль) напоминает паутину, поэтому такая модель установления равновесия часто называется **паутинообразной**. Можно доказать, что процесс колебаний является сходящимся, если всюду в диапазоне цен между $\boldsymbol{p_2}$ и $\boldsymbol{p_1}$ выполняется условие

$$S' \leq |D'|. \tag{3.111}$$

Это значит, что реакция производителя на изменение цены не должна быть столь же сильной, что и реакция покупателя. В случае, когда производитель реагирует на изменение цены сильнее, чем покупатель, спираль начнет раскручиваться в обратном порядке и достижение равновесия по указанной модели невозможно. В истории известны случаи подобного "раскачивания" рынка – колебания цен с постепенно увеличивающейся амплитудой.

В этом случае процесс описывается сходной паутинообразной моделью, но рассматривается процесс, происходящий в обратной последовательности:

1) Исходная цена на момент начала первого торгового дня определяет уровень спроса $\boldsymbol{D_1}$.

2) Если спрос не удовлетворен (предложение мало), происходит повышение цены, стимулирующее производителей увеличить предложение.

3) На следующий день производители предлагают большее количество товара, которое оказывается превышающим спрос, соответствующий установившейся накануне высокой цене. Цена снижается и т.д.

Если же кривые спроса и предложения таковы, что

$$S' = |D'|. \tag{3.112}$$

то возникает ситуация **свиного** цикла, когда спираль "закольцовывается" и достижение равновесия оказывается невозможным. Цена будет день ото дня устойчиво колебаться с постоянной амплитудой, между двумя повторяющимися значениями. Для выхода из такой ситуации необходимо регулирование цен.

Для иллюстрации применения паутинообразной модели воспользуемся примером 3.10, слегка дополнив его.

Пример 3.16. Фирма производит сельскохозяйственные машины, Расчет возможных издержек показал, что их зависимость от предполагаемого объема выпуска $\boldsymbol{y}$ можно описать функцией

$$C(y) = 2000 + 350y + 5y^{1.5}, (\text{тыс. руб.}).$$

Оптимальный объем выпуска машин по цене $\boldsymbol{p}$ в этом случае определяется с помощью формулы (3.98):

$$y_{\text{предл}} = \left(\frac{p - 350}{5 \cdot 1.5}\right)^{\frac{1}{0.5}}, (\text{штук}).$$

Эта формула определяет функцию предложения. Допустим, что анализ рынка показал: спрос на машины в зависимости от цены (функция спроса) задается формулой

$$y_{\text{спр}} = \frac{10000}{\sqrt{p}}.$$

Тогда основное уравнение равновесия (3.110) примет вид

$$\left(\frac{p - 350}{7.5}\right)^{\frac{1}{0.5}} = \frac{10000}{\sqrt{p}}.$$

Разрешим это уравнение относительно цены $\boldsymbol{p}$ в левой части:

$$\frac{p - 350}{7.5} = \frac{100}{\sqrt[4]{p}},$$

$$p = \frac{750}{\sqrt[4]{p}} + 350.$$

Эта формула позволяет определить цену следующего торгового дня по цене текущего

$$p_{i+1} = \frac{750}{\sqrt[4]{p_i}} + 350.$$

Результаты расчетов сведем в таблицу 3.1.

Таблица 3.1

Результаты расчетов задачи

i	p_i	p_{i+1}
1	600,00	501,54
2	501,54	508,48
3	508,48	507,94
4	507,94	507,98
5	507,98	507,98

Видно, что цена колеблется, постепенно приближаясь к равновесному уровню 507, 98 тыс. руб. Величину равновесного объема продаж можно найти из выражений функций спроса или предложения, подставив в формулу значение равновесной цены:

$$y = \frac{10000}{\sqrt{507{,}98}} = 443{,}69, \text{(машин)}.$$

Поскольку число машин получилось дробным, его следует округлить до целого в сторону уменьшения (чтобы получить незначительный отрицательный избыточный спрос).

3.6.5. Достижение равновесия на рынке одного товара в условиях регулирования цен. Модели «нащупывания»

При расчетах с помощью паутинообразной модели цена день ото дня испытывает колебания с постепенно уменьшающейся амплитудой. Возможен такой вариант процесса достижения равновесной цены, когда цена меняется строго монотонно. Он называется "нащупыванием". В процессе нащупывания важную роль играет централизованное регулирование цен.

Одной из моделей процесса нащупывания является **модель Самуэльсона** (П. Э. Самуэльсон (1915-2009) – американский экономист, лауреат Нобелевской премии 1970 г. по экономике). В этой модели изменение цены на начало нового торгового дня пропорционально величине избыточного спроса, имевшего место накануне

$$p_{i+1} = p_i + aE_i = p_i + a[D(p_i) - S(p_i)], (a > 0). \qquad (3.113)$$

Установлением цены занимается некий регулирующий орган или лицо – **арбитр**. По итогам торгов дня арбитр оценивает величину остаточного спроса и на основе этой оценки объявляет цену следующего торгового дня. Участники торгов обязаны следовать его указаниям. В результате производители, сообразуясь с объявленной ценой, обеспечивают предложение товара, определяемое функцией предложения. Покупатели, ориентируясь на указанную цену, обеспечивают в течение торгового дня спрос на товар, определяемый функцией спроса. Разница спроса и предложения определяет избыточный спрос и, с помощью (3.113), цену товара на новый день.

Коэффициент ***a*** называется **параметром настройки**. Его выбор играет большую роль. При слишком малых значениях параметра процесс приближения к равновесной цене затягивается надолго. При чересчур больших значениях параметра процесс может утратить сходимость и не привести к искомому равновесию. Для правильного выбора параметра настройки арбитр должен предварительно проанализировать примерный вид функций спроса и предложения и выбрать подходящее значение параметра. По ходу торгового процесса значение параметра может быть скорректировано.

В приведенной ниже таблице 3.2 показано применение модели Самуэльсона для поиска равновесной цены на сельскохозяйственные машины из примера, рассмотренного выше. Параметр настройки выбран равным 0,1. При больших значениях параметра процесс теряет устойчивость, и рынок начинает "раскачиваться" – цена испытывает колебания с постепенно увеличивающейся амплитудой.

Таблица 3.2

Применение модели Самуэльсона для поиска равновесной цены

i	p_i	D(p)	S(p)	E(p)	p_{i+1}
1	600,00	408,25	1111,11	-702,86	529,71
2	529,71	434,49	574,17	-139,68	515,75
3	515,75	440,33	488,39	-48,05	510,94
4	510,94	442,40	460,48	-18,08	509,13
5	509,13	443,18	450,19	-7,01	508,43

На рис. 3.26 приведены графики изменения цены по торговым дням в паутинообразной модели и модели Самуэльсона для рассмотренного примера, построенные по результатам расчетов, приведенных в таблицах для этих моделей.

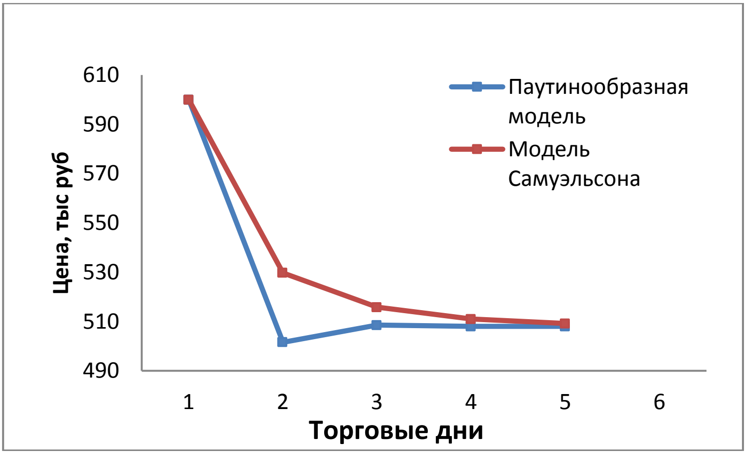

Рис. 3.26. Установление рыночного равновесия в паутинообразной модели и модели Самуэльсона

3.6.6. Достижение равновесия на многотоварном рынке

В случае, если на рынке присутствуют одновременно несколько взаимозаменяемых товаров, установление равновесия происходит аналогично случаю одного товара.

Допустим, что к началу 1-го торгового дня установилась некая система цен $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1K})$. Она определяет уровень предложений $S_{1k}.(k=1,2,\ldots,K)$ для совокупности из $\boldsymbol{K}$ товаров. В течение дня все предложенные товары распродаются в полных объемах, но уже по тем ценам, которые согласны платить покупатели. Это порождает для следующего торгового дня новую систему цен $\boldsymbol{p_2}$, которые можно определить, решая систему уравнений

$$D_k(p_2) = S_{1k}, \qquad (3.114)$$

где $\boldsymbol{D_k}$ – функция спроса на k-товар. Согласно теории потребительского поведения она определяется системой цен на все взаимозаменяемые товары.

Возможно и применение модели "нащупывания", которая в случае многих товаров имеет вид

$$p_{i+1,k} = max\left[0;\ p_{i,k} + a_k\left(D_{i,k} - S_{i,k}\right)\right], \qquad (3.115)$$

где $\boldsymbol{a_k}$ – параметры настройки.

3.6.7. Равновесие в системе с ограниченными ресурсами. Задача выпуклого программирования

Рассмотренная задача описывает процесс производства товаров с помощью функций предложения, на которые не накладывается существенных ограничений. Для того, чтобы рассмотреть более сложную экономическую систему, учитывающую возможную ограниченность ресурсов производства, необходимо предварительно ознакомиться с новым классом математических задач оптимизации.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования. Ее формулировка такова:

Требуется максимизировать вогнутую функцию $\boldsymbol{N}$ переменных

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N\right) \to max$$

при следующих условиях:

1) все переменные $x_j \geq 0$;
2) выполняются неравенства $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, M$);
3) все функции g_i – вогнутые.

Напомним, что **вогнутыми** называются функции, у которых во всей области их определения отрицательна вторая производная (для функций нескольких переменных – вторые производные по всем аргументам).

Необходимые и достаточные условия существования решения этой задачи определяет **теорема Куна-Таккера**:

Для того чтобы точка (вектор) $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ являлась решением задачи выпуклого программирования, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка (вектор) $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_i, \dots, u_M)$, чтобы пара точек x^*, u^* образовывала неотрицательную ***седловую точку*** *функции Лагранжа*

$$L(x,u) = f(x) + \sum_{i=1}^{M} u_i g_i(x). \qquad (3.116)$$

Это означает, что при отклонении любой составляющей вектора $\boldsymbol{x}$ от данной точки функция $\boldsymbol{L(x, u)}$ уменьшается, а при отклонении любой составляющей вектора $\boldsymbol{u}$ от этой же точки – увеличивается:

$$L(x,u^*) \le L(x^*,u^*) \le L(x^*,u). \qquad (3.117)$$

Для нахождения седловой точки функции Лагранжа применяются различные итерационные алгоритмы (алгоритмы последовательных приближений). В экономическом моделировании используется алгоритм (модель) **Эрроу-Гурвица** (К. Эрроу (род. 1921) и Л.Гурвиц(1917-2008) –американские экономисты, лауреаты Нобелевской премии по экономике 1972 и 2007 г соответственно). Процесс осуществляется по шагам, причем на каждом (l+1)-шаге значения неизвестных $\boldsymbol{x_j}$ и параметров $\boldsymbol{u_i}$ определяются через предыдущие значения этих величин (на l-шаге) с помощью формул:

$$\left(x_j\right)_{l+1} = max\left\{0; \left(x_j\right)_l + \alpha_j \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_l + \sum_{i=1}^{M} (u_i)_l \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_l\right] \right\}, \qquad (3.118)$$

$$(u_i)_{l+1} = max\{\ 0;\ \ (u_i)_l - \beta_i g_i(x_l)\ \}. \qquad (3.119)$$

Положительные параметры $\boldsymbol{\alpha_j}$ и $\boldsymbol{\beta_i}$ называются параметрами настройки и должны быть выбраны относительно малыми, иначе процесс поиска потеряет устойчивость. Окончание поиска происходит, когда отличие найденных значения неизвестных $\boldsymbol{x_j}$ и параметров $\boldsymbol{u_i}$ от предыдущих становится достаточно малым. Основные варианты условия окончания:

$$\sum_{j=1}^{N} \left[\left(x_j\right)_{l+1} - \left(x_j\right)_l\right]^2 < \ \varepsilon \qquad (3.120)$$

или

$$\max_j \left|\left(x_j\right)_{l+1} - \left(x_j\right)_l\right| < \ \varepsilon \qquad (3.121)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – заранее выбранная малая величина.

Полученный в ходе решения вектор $\boldsymbol{x}$ определяет решение задачи, а компоненты вектора $\boldsymbol{u}$ характеризуют сравнительную важность ограничений задачи.

Можно отметить, что для рассматриваемой задачи алгоритм Эрроу-Гурвица представляет собой алгоритм "нащупывания" оптимального решения.

Рассмотрим сложную экономическую систему, состоящую из потребительского сектора, производственного сектора и сектора ресурсов.

Предположим, что на рынке обращается $\boldsymbol{N}$ товаров (благ). Набор этих благ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N)$ описывается единой функцией полезности

$$U\left(x_1,\ x_2, \ldots x_j, \ldots, x_N\right).$$

Структура производственного сектора такова. Блага производятся каждое отдельным производителем в количестве $\boldsymbol{y_j}$ (j = 1, 2, …, N). Уровень производства определяется производственной функцией

$$y_j = f_j\left(r_{j1}, r_{j2}, \ldots r_{jk}, \ldots, r_{jK}\right), \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \qquad (3.122)$$

где $\boldsymbol{r_{jk}}$ – затраты $\boldsymbol{k}$-ресурса (k = 1,2, …, K) на производство $\boldsymbol{j}$-продукта (блага).

Структура ресурсного сектора описывается набором объемов ресурсов $\boldsymbol{R_k}$, предназначенных для использования в производственном секторе. На использование ресурсов накладываются очевидные ограничения

$$\sum_{j=1}^{N} r_{jk} \le R_k, \quad \left(\text{для всех } k\right). \qquad (3.123)$$

Состояние равновесия (в широком смысле) определяется как следующее соотношение между спросом $\boldsymbol{x}$ и предложением $\boldsymbol{y}$ одновременно для каждого товара:

$$x_j \le y_j\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \qquad (3.124)$$

Требуется отыскать такие значения объемов потребления $\boldsymbol{x_j}$, при которых функция полезности $\boldsymbol{U(x)}$ окажется максимальной и будут выполнены как условия ограниченности ресурсов

(3.123), так и условия равновесия (3.124). С учетом (3.122) получаем следующую математическую запись задачи

$$U(x_1, x_2, \dots, x_N) \to max \qquad (3.125)$$

при условиях

$$f_j(r_j) - x_j \geq 0, \;\; j = 1,2, \dots, N, \qquad (3.126)$$

$$R_k - \sum_{j=1}^{N} r_{jk} \geq 0, \;\; k = 1,2, \dots, K\,, \qquad (3.127)$$

$$x_j \geq 0, \qquad r_{jk} \geq 0. \qquad (3.128)$$

Легко видеть, что данная задача представляет собой частный случай задачи выпуклого программирования. Роль целевой функции $\boldsymbol{f}$ в данном случае играет функция полезности $\boldsymbol{U}$, а функциям ограничений $\boldsymbol{g_i}$ соответствуют выражения

$$\bar{g}_j = f_j(r_j) - x_j$$

и

$$\bar{\bar{g}}_k = R_k - \sum_{j=1}^{N} r_{jk}.$$

Тогда функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(x, p, w) = U(x) + \sum_{j=1}^{N} p_j [f_j(r_j) - x_j] + \sum_{k=1}^{K} w_k \left(R_k - \sum_{j=1}^{N} r_{jk}\right) \qquad (3.129)$$

Эта функция содержит два вектора множителей Лагранжа. Компоненты вектора $p = (p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_N)$ имеют смысл оптимальных цен на различные виды продукции. Компоненты вектора $w = (w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_K)$ соответствуют оценкам используемых в производстве ресурсов – материальных, или сырьевых (тогда $\boldsymbol{w_k}$ – цена единицы сырья), трудовых, или человеческих (тогда $\boldsymbol{w_k}$ – ставка заработной платы), финансовых (тогда соответствующий параметр задает оценку стоимости услуг капитала – ставку банковского процента по кредитам) и т.п. Дополнительную группу вспомогательных неизвестных образуют значения $\boldsymbol{r_{jk}}$ – расходов $\boldsymbol{k}$-ресурса на выпуск единицы $\boldsymbol{j}$-товара.

Итерационные формулы для поиска оптимальных параметров рынка в этом случае имеют вид:

$$\left(x_j\right)_{l+1} = max\left\{0;\ \left(x_j\right)_l + \alpha_j\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)_l - \left(p_j\right)_l\right]\right\}, \quad (3.130)$$

$$\left(r_{jk}\right)_{l+1} = max\left\{0;\ \left(r_{jk}\right)_l + \beta_{jk}\left[\left(p_j\right)_l\left(\frac{\partial f_j}{\partial r_{jk}}\right)_l - (w_i)_l\right]\right\}, \quad (3.131)$$

$$\left(p_j\right)_{l+1} = max\left\{0;\ (p_i)_l - \gamma_j\left[\left(f_j(r_j)\right)_l - \left(x_j\right)_l\right]\right\}, \quad (3.132)$$

$$(w_k)_{l+1} = max\left\{0;\ (w_k)_l - \delta_k\left[R_k - \sum_{j=1}^{N}\left(r_{jk}\right)_l\right]\right\}. \quad (3.133)$$

Данный итерационный процесс достаточно точно имитирует рыночный механизм достижения равновесия путем варьирования объемов спроса на блага (товары) и ресурсы, а также объемов соответствующих цен. Отдельные шаги итерационного процесса в этом случае соответствуют торговым дням.

Контрольные вопросы

1. Что определяет производственная функция в экономической системе?
2. Что понимается под спецификацией и параметризацией производственной функции?
3. В чем заключается закон убывающей эффективности?
4. Что представляет собой изокванта функции нескольких переменных?
5. Как меняется объем трудовых ресурсов в модели Мальтуса? При каких условиях эта модель адекватна?
6. Дайте определение величины капиталовооруженности.
7. Какая ситуация описывается золотым правилом накопления капитала в модели Солоу?
8. Как изменяется уровень потребления при изменении нормы сбережения до оптимального уровня в случае, если первоначально эта норма была выше оптимальной (соответствующей золотому правилу накопления капитала)? Как меняется уро-

вень потребления после изменения нормы сбережения, если первоначально она была ниже оптимальной?

9. Какая экономическая система описывается моделью Леонтьева?

10. Что представляют собой элементы технологической матрицы (матрицы прямых затрат) в модели Леонтьева?

11. В каком случае модель Леонтьева называется продуктивной?

12. Что определяют элементы матрицы полных затрат в модели Леонтьева?

13. Ч то понимается под отношением слабого предпочтения в теории потребительского поведения? В каком случае между потребительскими наборами имеет место отношение безразличия? Отношение сильного предпочтения?

14. Что понимается под функцией полезности?

15. Что представляет собой кривая безразличия?

16. Какое свойство отдельных благ в потребительском наборе называется их взаимозамещением?

17. Какое свойство отдельных благ в потребительском наборе называется их взаимодополнением?

18. Что представляет собой предельная норма замещения блага? Каково ее математическое выражение?

19. Какой смысл имеет множитель Лагранжа при решении задачи оптимизации потребительского выбора набора из нескольких благ?

20. Какие товары (блага) называются нормальными?

21. Какие товары (блага) называются аномальными?

22. Охарактеризуйте виды аномальных товаров.

23. Дайте определение коэффициента эластичности функции y(x) по независимой переменной x. Что характеризует коэффициент эластичности?

24. Какие товары называются ценными и малоценными?

25. Как меняется спрос на благо (товар), если цена на него повышается, но потребители получают компенсацию дохода в размере, уравновешивающем это повышение цены?

26. Дайте определения основных характеристик технологического способа: ресурсоотдачи, ресурсоемкости, предельной продуктивности ресурса.

27. Что характеризует коэффициент замены одного ресурса другим?

28. Что такое изокоста?

29. Что определяет функция предложения?

30. Какие товары на рынке называются конкурирующими (с точки зрения производителя)?

31. Какие товары на рынке называются комплектными (с точки зрения производителя)?

32. При каком условии возникает рыночное равновесие?

33. Что такое инфляция спроса?

34. Что такое инфляция издержек?

35. Что представляют собой мгновенное, кратковременное и длительное нормальное равновесие на рынке при возникновении устойчивого спроса на товар? Как они достигаются?

36. Опишите паутинообразный процесс достижения рыночного равновесия.

37. Опишите процесс достижения рыночного равновесия по модели Самуэльсона.